Unidad V: Interpolación

5.1 Polinomio de interpolación de Newton

Utilizar la matriz de Vandermonde para muchos nodos no es muy buena idea ya que el tiempo de cálculo para matrices grandes es excesivo. Es mucho más sencillo utilizar el método clásico de las diferencias divididas de Newton. Recordemos su definición, para dos nodos, se llama diferencia dividida de orden uno a :

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Mientras que la diferencia dividida de orden n se obtiene por recurrencia a partir de las anteriores como:

$$f[x_0, ..., x_n] = \frac{f[x_1, ..., x_n] - f[x_0, ..., x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

El polinomio de Newton en diferencias divididas es entonces:

p(x)=f[x0]+(x-x0) f[x0,x1]+ (x-x0)(x-x1) f[x0,x1]+ +(x-x0)(x-x1) (x-xn-1) f[x0,x1, ... , xn]

El polinomio de interpolación con diferencias divididas de Newton, entre otros es la forma más popular además de las más útil.

Interpolación Lineal

La forma más simple de interpolar es la de conectar dos puntos con una línea recta. Este método, llamado interpolación lineal, se muestra en la figura:ç

Usando triángulos semejantes, se tiene:

$$\frac{f\,1(X) - f\,(X_0)}{X - X_0} = \frac{f\,(X_1) - f\,(X_0)}{X_1 - X_0}$$

se puede reordenar como :

$$f\,1(X) = f\,(X_0) + \frac{f\,(X_1) - f\,(X_0)}{X_1 - X_0}\,(X - X_0)$$

La cual es una fórmula de interpolación lineal. La notación f 1(X) indica que se trata de un polinomio de interpolación de primer orden. Nótese que además de representar la pendiente de la linera que conecta los dos puntos, el termino

$$\frac{f\,(X_1) - f\,(X_0)}{X_1 - X_0}$$

Es una aproximación de diferencias divididas finitas a la primera derivada. En general, entre más pequeño sea el intervalo entre dos puntos, más exacta será la aproximación.

Interpolación Cuadrática

Una estrategia que mejora la aproximación es la introducir cierta curvatura en la línea que conecta a los puntos. Si se dispone de tres datos, lo anterior se puede llevar a cabo con un polinomio de segundo orden (llamado también polinomio cuadrático o parábola). Una manera conveniente para este caso es :

$$f_2(X) = b_o + b_1\ (X - X_0) + b_1\ (X - X_0) + b_2\ (X - X_0)\ (X - X_1)$$

Nótese que aunque la ecuación [1] parezca diferente de la ecuación general de un polinomio :

$$b_0 = f\ (X_0)$$

Las dos ecuaciones son equivalentes.

Se puede usar un procedimiento simple para determinar los valores de los coeficientes. Para bo , se usa la ecuación [4] con X=X0 y se obtiene.

Sustituyendo la ecuación [6] y [4] y evaluando en X=X1 se obtiene:

$$b_2 = \frac{\frac{f(X_2) - f(X_1)}{X_2 - X_1} - \frac{f(X_1) - f(X_0)}{X_1 - X_0}}{X_2 - X_0}$$

Y por ultimo las ecuaciones [7] y [6] se sustituyen en la ecuación [4] y se evalúa está en X=X2 y se obtiene:

$$b_2 = \frac{\frac{f(X_2) - f(X_1)}{X_2 - X_1} - \frac{f(X_1) - f(X_0)}{X_1 - X_0}}{X_2 - X_0}$$

Nótese que, al igual que en el caso de interpolación lineal, b1 aun representa la pendiente de la línea que une los puntos X0 y X1. Por lo tanto, los primeros dos términos de la ecuación [4] son equivalentes a la interpolación de X0 a X1. El ultimo termino b2(X-X0) (X-X1), introduce la curvatura de segundo orden de la formula.

Forma general de los Polinomios de Interpolación de Newton:

$$f_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)f[x_1,x_0] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_2,x_1,x_0] + \ldots + (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})f[x_n,x_{n-1},\ldots,x_0]$$

Se debe notar que no es necesario que los datos usados en la ecuación [9] estén igualmente espaciados o que los valores de la abscisa necesariamente se encuentren en orden ascendente. También nótese que las ecuaciones son recursivas, esto es las diferencias de orden superior se componen de las diferencias de orden inferior. Esta propiedad se puede aprovechar al desarrollar un programa eficiente para un computador.

5.2 Polinomio de interpolación de Lagrange

Se trata de encontrar un polinomio de grado n que pase por los puntos (x0, f(x0)), (x1, f(x1)), ... (xn, f(xn)), se construye un cociente Ln,k(xk) con la propiedad de que

Ln,k(xi) = 0 cuando i ¹ k y Ln,k(xk) = 1

Se requiere entonces que el numerador contenga

(x – x0) (x – x1)... (x – xk–1)(x – xk+1)... (x – xn)

El denominador debe coincidir con el numerador cuando x = xk.

$$\frac{\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{\cdot\cdot(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}=\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}\frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

N-ésimo polinomio interpolante de Lagrange

Teorema

Si x0, x1, x2, ... xn, son n+1 números distintos y si f es una función cuyos valores están dados en esos números, entonces existe un polinomio de grado a lo más n, con la propiedad de que

f(xk) = P(xk) para cada k = 0, 1, 2, ...n

Este polinomio está dado por:

$$(x_0)L_{n,0}(x)+\cdots+f(x_n)L_{n,n}(x)=\sum_{k=0}^{n}f(x_k)L_{n,k}(x)$$

Donde

$$\frac{\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{\cdot\cdot(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}=\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}\frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

Aproximación a 1/x con interpolantesde Lagrange

Usaremos x0 = 2, x1 = 2.5 y x2 = 4, para obtener un polinomio de grado 2 para 1/x. f(x0) = 0.5, f(x1)= 0.4 y f(x2) = 0.25.

Los polinomios de Lagrange son:

$$L_{n,0}(x) = \frac{(x-2.5)(x-4)}{(2-0.5)(2-4)} = (x-6.5)x+10$$

$$L_{n,1}(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(2.5-2)(2.5-4)} = \frac{(-4x+24)x-32}{3}$$

$$L_{n,2}(x) = \frac{(x-2)(x-2.5)}{(4-2)(4-2.5)} = \frac{(x+4.5)x+5}{3}$$

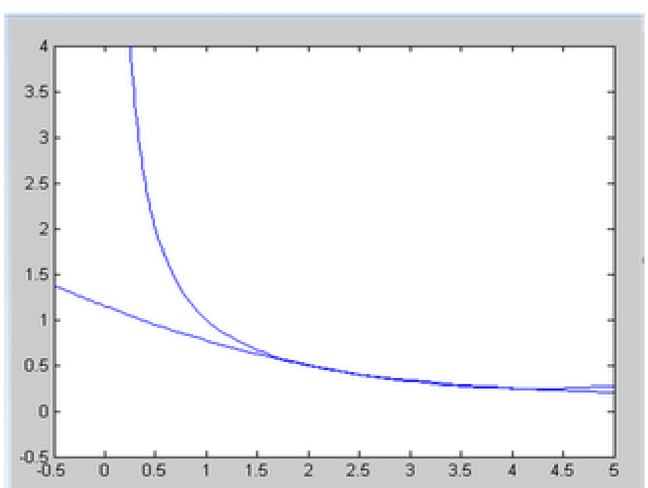
P(x) = 0.5*((x–6.5)x+10)+0.4*((–4x+24)x–32)/3+ 0.25*((x + 4.5)x+5)/3

P(x) = (0.05x – 0.425)x + 1.15 = 0.05x2 – 0.425x + 1.15

f(3) = P(3) = 0.325

P(x) = (0.05x – 0.425)x + 1.15

f(3) = P(3) = 0.325



5.3 Interpolación segmentada

Esta interpolación se llama interpolación segmentaria o interpolación por splines. La idea central es que en vez de usar un solo polinomio para interpolar los datos, podemos usar segmentos de polinomios y unirlos adecuadamente para formar nuestra interpolación.

Cabe mencionar que entre todas, las splines cúbicas han resultado ser las más adecuadas para aplicaciones como la mencionada anteriormente.

Así pues, podemos decir de manera informal, que una funcion spline está formada por varios polinomios, cada uno definido en un intervalo y que se unen entre si bajo ciertas condiciones de continuidad.

Interpolación Segmentaria Lineal

Este es el caso más sencillo. En él, vamos a interpolar una función f(x) de la que se nos dan un número N de pares (x,f(x)) por los que tendrá que pasar nuestra función polinómica P(x). Esta serie de funciones nuestras van a ser lineales, esto es, con grado 1: de la forma $P(x) = ax + b$.

Definiremos una de estas funciones por cada par de puntos adyacentes, hasta un total de (N-1) funciones, haciéndolas pasar obligatoriamente por los puntos que van a determinarlas, es decir, la función P(x) será el conjunto de segmentos que unen nodos consecutivos; es por ello que nuestra función será continua en dichos puntos, pero no derivable en general.

Interpolación Segmentaria Cuadrática

En este caso, los polinomios P(x) a través de los que construimos el Spline tienen grado 2. Esto quiere decir, que va a tener la forma $P(x) = ax^2 + bx + c$

Como en la interpolación segmentaria lineal, vamos a tener N-1 ecuaciones (donde N son los puntos sobre los que se define la función). La interpolación cuadrática nos va a asegurar que la función que nosotros generemos a trozos con los distintos P(x) va a ser continua, ya que para sacar las condiciones que ajusten el polinomio, vamos a determinar como condiciones:

Que las partes de la función a trozos P(x) pasen por ese punto. Es decir, que las dos Pn(x) que rodean al f(x) que queremos aproximar, sean igual a f(x) en cada uno de estos puntos.

Que la derivada en un punto siempre coincida para ambos "lados" de la función definida a trozos que pasa por tal punto común.

Esto sin embargo no es suficiente, y necesitamos una condición más. ¿Por qué?. Tenemos 3 incógnitas por cada P(x). En un caso sencillo con f(x) definida en tres puntos y dos ecuaciones P(x) para aproximarla, vamos a tener seis incógnitas en total. Para resolver esto necesitaríamos seis ecuaciones, pero vamos a tener tan sólo cinco: cuatro que igualan el P(x) con el valor de f(x) en ese punto (dos por cada intervalo), y la quinta al igualar la derivada en el punto común a las dos P(x).

Se necesita una sexta ecuación,¿de dónde se extrae? Esto suele hacerse con el valor de la derivada en algún punto, al que se fuerza uno de los P(x).

Interpolación Segmentaria Cúbica

En este caso, cada polinomio P(x) a través del que construimos los Splines en [m,n] tiene grado 3. Esto quiere decir, que va a tener la forma $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

En este caso vamos a tener cuatro variables por cada intervalo (a,b,c,d), y una nueva condición para cada punto común a dos intervalos, respecto a la derivada segunda:

Que las partes de la función a trozos P(x) pasen por ese punto. Es decir, que las dos Pn(x) que rodean al f(x) que queremos aproximar, sean igual a f(x) en cada uno de estos puntos.

Que la derivada en un punto siempre coincida para ambos "lados" de la función definida a trozos que pasa por tal punto común.

Que la derivada segunda en un punto siempre coincida para ambos "lados" de la función definida a trozos que pasa por tal punto común.

Como puede deducirse al compararlo con el caso de splines cuadráticos, ahora no nos va a faltar una sino dos ecuaciones (condiciones) para el número de incógnitas que tenemos.

La forma de solucionar esto, determina el carácter de los splines cúbicos. Así, podemos usar:

Splines cúbicos naturales: La forma más típica. La derivada segunda de P se hace 0 para el primer y último punto sobre el que está definido el conjunto de Splines, esto son, los puntos m y n en el intervalo [m,n].

Dar los valores de la derivada segunda de m y n de forma "manual", en el conjunto de splines definidos en el intervalo [m,n].

Hacer iguales los valores de la derivada segunda de m y n en el conjunto de splines definidos en el intervalo [m,n].

5.4 Problemas de aplicación